

國立臺灣科技大學102學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科目：工程數學

(總分為100分)

1. 試解以下之拉氏轉換(Laplace Transform)問題，其中 $L[\cdot]$ 及 $L^{-1}[\cdot]$ 分別為拉氏轉換及逆轉換符號。

(1) $g(t) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq t \leq 2 \\ t^2 & ; 2 < t \end{cases}$ ，試求 $L[g(t)]$ 。(10%)

(2) $L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+4}\right]$ 。(5%)

(3) 試求 $L[\cos(t)\delta(t-1)]$ ，其中 $\delta(t)$ 為 Dirac delta 函數。(5%)

2. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 A 之反矩陣 A^{-1} 。(10%)

3. (1) 試求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ 之所有特徵值(eigen-value)及其對應之特徵向量(eigen-vector) (10%)。

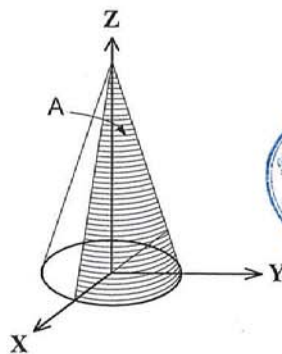
(2) 請以(1)之結果求解以下初始值問題。(10%)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. 參數變異法是用來求得常係數二階線性微分方程式特解的方法：

假設 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是 $y''(x) + Ay'(x) + By(x) = f(x)$ homogeneous 方程式的解，若假設 $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ ，請證明

$$u'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}; \quad v'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \quad \text{其中 } W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (20\%)$$

5. 一曲面 Σ 由函數方程式 $\Sigma: z = 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2}$ 且 $x \geq 0; y \geq 0; 4 \geq z \geq 0$ 所定義，請計算(1) 曲面 Σ 之面積 A 。(10%)(2) 曲面 Σ 與 $x=0; y=0; z=0$ 三平面所夾的體積 V 。(10%)6. 試解一階微分方程式 $[e^{(x+y)} + ye^y] + xe^y \frac{dy}{dx} = 0$ 。(10%)