

國立臺灣科技大學 107 學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科目：工程數學

(總分為 100 分)

一、已知一階微分方程式 $(y - y^4) + y'(x) = 0$ 具有積分因子(integrating factor)表為 $u(x, y) = e^{ax} y^b$,

(a) 試求 a 與 b 之值。(10%)

(b) 試求微分方程之通解(general solution)。(5%)

二、一 3×3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(a) 試求 A 之所有特徵值(eigen-value)及其對應之特徵向量(eigen-vector)。(10%)(b) 若矩陣 A 之 $1/2$ 次方定義為 $A^{1/2}$, 可滿足 $A^{1/2} A^{1/2} = A$ 。試求 $A^{1/2}$ 。(10%)

三、二階微分方程式 $y'' - \left(\frac{3}{x}\right)y' + \left(\frac{4}{x^2}\right)y = 0, x > 0$ 之一解已知為 $y_1(x) = x^2$, 試以降階法(reduction of order)求其另一解 $y_2(x)$ 。(15%)

四、已知 $h(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t < 4 \end{cases}$ 且 $h(t+4) = h(t)$

(a) 求 $h(t)$ 之傅利葉級數(Fourier Series), 並討論其收斂性。(10%)(b) 若 $a\ddot{y}(t) + by(t) = h(t)$, 其中 a, b 為正常數, 求解 $y(t)$ 之穩態(steady-state)解。(10%)

五、(a) 若 $r(t)$ 及 $q(t)$ 於 $t \geq 0$ 時存在, $r(t) * q(t)$ 為其摺積(convolution), 證明 $r(t) * q(t)$ 之拉普拉斯轉換(Laplace Transform)等於 $r(t)$ 之拉普拉斯轉換乘以 $q(t)$ 之拉普拉斯轉換。(5%)

(b) 已知 $\int_0^t g(t-\tau) e^{-5\tau} d\tau + 3\sin(2t) = 2g(t)$, 利用拉普拉斯轉換求 $g(t)$ 。(10%)

六、某一力場 $\vec{P} = \left(3x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\vec{i} + \left(-y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\vec{j}$ 驅動一質點由(2,2)出發,

沿直線移動至(-2,2), 再沿直線移動至(-2,-1), 最終沿曲線移動回到(2,2),

求此力場所作之總功(total work)。(15%)

