

## 國立臺灣科技大學 110 學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科目：工程數學

(總分為 100 分)

1. 已知二階微分方程  $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$  之一已知解為  $y_1 = x$ ，試求其另一解  $y_2$ 。(15%)
2. 試求下列一階微分方程之通解。(15%)

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy + x^2 y^2 = 1$$

3. 正交矩陣(orthogonal matrix)定義為  $QQ' = Q'Q = I$ ，其中  $Q'$  為矩陣  $Q$  之轉置(transpose)矩陣。
  - (a) 證明正交矩陣  $Q$  具備  $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$  之性質，其中  $\|\cdot\|$  表向量長度， $\mathbf{x}$  為任意向量。(10%)

- (b) 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，試求一正交矩陣  $Q$  可將  $A$  對角化

(diagonalization)，並驗證其對角化之結果。(10%)

4. 若  $\dot{x}(t) + x(t) + y(t) = t^2$  且  $\dot{x}(t) - \dot{y}(t) + 2x(t) = 0$  且  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ ，試以拉普拉斯轉換(Laplace Transform)求解  $x(t)$ 。(15%)
5. 試求下列有關傅利葉之表示式(Fourier Representation)。
  - (a) 若  $f(x) = 1 - |x|$ ， $-2 \leq x \leq 2$  且  $f(x) = f(x+4)$ ，求  $f(x)$  在  $[-\infty, \infty]$  之傅利葉表示式。(15%)
  - (b) 若  $g(x) = 1 - |x|$ ， $-2 \leq x \leq 2$  且  $g(x) = 0$ ， $|x| > 2$ ，求  $g(x)$  在  $[-\infty, \infty]$  之傅利葉表示式。(5%)
6. 求解面積分  $\iint_{\Sigma} (x+y)d\sigma$  其中  $\Sigma$  為平面  $x+5y+z=10$  位於第一象限之部分。(15%)

