國立臺灣科技大學111學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科　　目：工程數學

（總分為100分；所有試題務必於答案卷內頁依序作答，否則不予計分）

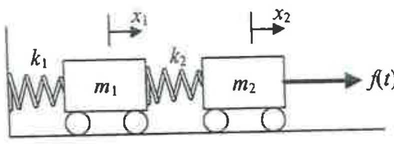
1. 參數變異法是用來求得二階線性微分方程式特解的方法之一：
假設 $y_1(x)$與 $y_2(x)$是$y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x)$ homogeneous 方程式的解，若假設 $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$，請證明

$$u'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}$$

其中$W(x) = y_1y_2' - y_2y_1'$。(15%)

$$v'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

2. 圖示一彈簧串聯系統，其運動方程式如下所示，若 M_1=10 kg、M_2=5 kg、K_1=10N/m、K_2=15 N/m、$f(t)$=sin(2t)，請解兩自由度之位移歷時 $x_1(t)$與 $x_2(t)$。(20%)



$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

3. 一實數對稱矩陣[S]如下，請證明其伴隨相異特徵值的特徵向量為正交。(15%)

$$[S] = \begin{bmatrix} a & e & f & g \\ e & b & h & i \\ f & h & c & j \\ g & i & j & d \end{bmatrix}$$

4. 令一曲面Σ為 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，$x \geq 0$，$y \geq 0$，$0 \leq z \leq 2$。令C為曲面Σ之閉合邊界，其走向為$(0,0,0) \to (2,0,2) \to (0,2,2) \to (0,0,0)$，已知$\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$為三維向量場。(20%)

(1) 試求曲面積分 $I = \iint_{\Sigma} x\, d\sigma$ 之值。(10%)

(2) 試求$\mathbf{F}$沿邊界C一圈所做之功$\oint_c \mathbf{F} \bullet d\mathbf{R}$。(10%)

國立臺灣科技大學 111 學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科　　目：工程數學

（總分為 100 分；所有試題務必於答案卷內頁依序作答，否則不予計分）

5. 已知一訊號 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4} & -\pi\le x<0\\ \dfrac{\pi}{4} & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 之 Fourier Series 展開式為 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$。此訊號經下列兩種不同之濾波器，將各頻率之原強度值 b_n 重新調整為 $\bar{b}_n$，形成之新訊號為 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \sin(nx)$，試分別將 $g(\frac{\pi}{2})$ 之值化簡為最簡分式。(20%)

(1) 低頻通過濾波器: $\bar{b}_n=\begin{cases}b_n & n\le 3\\ 0 & n>3\end{cases}$ (10%)

(2) 高頻通過濾波器: $\bar{b}_n=\begin{cases}0 & n\le 3\\ b_n & n>3\end{cases}$ (10%)

6. 兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之 convolution 定義式為 $f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$，令 $r(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$，試求 $r(t)*r(t)$ 並繪製此函數圖。 (10%)