

1. 假設飽和黏土承受荷重時，其中土粒結構與孔隙水之應力分別用彈簧與阻尼模式表示；

土粒結構 $\sigma_s = k\varepsilon$

孔隙水 $\sigma_w = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$

上式中： t=時間； $\sigma = \sigma(t)$ =應力； $\varepsilon = \varepsilon(t)$ =應變

k=彈簧常數； η =阻尼常數

則飽和黏土承受持續荷重時，總應力寫成；

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_w = k\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

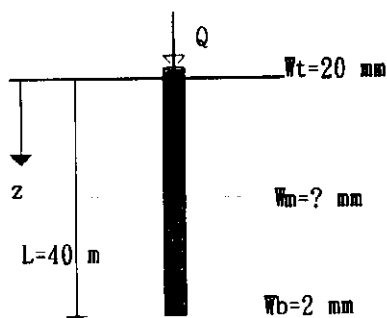
已知 $\varepsilon(0)=0$ ，利用拉普拉氏轉換法(Laplace Transformation Method)求解上式，並繪出 σ 、 σ_s 、 σ_w 隨時間變化之曲線。(30 分)

2. 設均勻地層中，軸向荷重樁樁身沉陷行為由下列微分方程式控制；

$$\frac{dw^2}{dz^2} - \lambda^2 w = 0$$

w=沉陷量； z=深度

λ =樁之特徵值(characteristic value)



已知某試樁樁長40 m， $\lambda=0.01 \text{ m}^{-1}$ ；樁頂沉陷量 $w_t=20\text{mm}$ ，樁底沉陷量 $w_b=2\text{mm}$ (見上圖)，求樁中點沉陷量 $w_m(\text{mm})$ 。(20 分)



八十五學年度國立台灣工業技術學院研究所碩士班招生考試

所別：營建工程技術研究所

組別：大地組

科目：工程數學

3. 有一組聯立方程式如下：

$$y_1' = y_1 - y_2 + 2y_3$$

$$y_2' = 3y_1 + 4y_3$$

$$y_3' = 2y_1 + y_2$$

其中 y_1, y_2, y_3 為 t 的函數； $y_1' = \frac{dy_1}{dt}$ ， $y_2' = \frac{dy_2}{dt}$ ， $y_3' = \frac{dy_3}{dt}$

(a) 試將此聯立方程式寫成矩陣型式 $[Y]' = [A][Y]$ (5 分)

(b) 矩陣 $[A]$ 的特徵值(eigenvalues)為何？ (10 分)

(c) 若知由矩陣 $[A]$ 的特徵向量(eigenvectors)所組成的矩陣 $[P]$ 可以將矩陣 $[A]$ 主軸化(diagonalize)，也就是 $[P]^{-1}[A][P] = [D]$ ，其中 $[D]$ 是由特徵值所組成的對角矩陣(diagonal matrix)。

$$\text{令 } [Y] = [P][Z] \quad , \quad [Z] = [Z(t)] = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

試求矩陣 $[Z(t)] = ?$ (15 分)

4. 有一物體在空間中運動的軌跡為

$$\vec{R}(t) = 2\sin t \vec{i} + t \vec{j} + 2\cos t \vec{k} \quad (t = \text{時間})$$

(a) 試定義曲率(curvature)和曲率半徑(radius of curvature)，並扼要說明其意義。 (10 分)

(b) 試求在時間 $t = t_a$ 時之曲率半徑？ (10 分)

