八十五學年度國立台灣工業技術學院研究所碩士班招生考試

所別：電子工程技術研究所　　組別：元件與材料組　　科目：工程數學

1. 設 $F(x,y,a)=0$, $G(x,y,b)=0$ 爲二組相互正交之曲線族方程式，即曲線在交點上是相互垂直。若 $F(x,y,a)=x^2-y^2-a^2$，且 a, b 皆爲正實數。試求 $G(x,y,b)$ (10%)

2. 設 $y''+4y=4[u(t)-u(t-1)]$，$y(0)=0$, $y'(0)=3$ 其中 $u(t)$ 爲步階 (unit step) 函數。試請以 Laplace 轉換方法，求解 $y(t)$ (10%)

3. 試求向量 $F=z\,i+y\,j+x\,k$ 通過圓錐體 $z^2=x^2+y^2$，$0<z<1$，表面之通量 (flux)。 (15%)

4. (1) 設 A 爲 Hermitian 矩陣，即 $A^t=A^*$，其中"t" 表倒置運算，"*" 表取共軛複數。試證 A 之特徵值 (eigen value) λ_k 皆爲實數，特徵向量 (eigen vector) V_k 相互正交。 (10%)

   (2) 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3(1-i) \\ 3(1+i) & 5 \end{bmatrix}$。試求其特徵向量及特徵值。 (5%)

5. 設全波整流信號 $y(t)=|\sin(\varpi_0 t)|$。試請以 Fourier 級數表示 $y(t)$。 (10%)

6 設複變函數 $f(z)$ 在由封閉曲線 c 所包範圍內之任一點 z_0 爲可分析 (analytic)。試請利用 Cauchy 積分公式，證明

   (1) $$f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{n!}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$ (5%)

   (2) $f(z)$ 可用泰勒級數表示爲

   $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\cdot(z-z_0)^n$$ (10%)

7. 試依路徑 (1) c: $|z|=1$，(2) c: $|z|=3$，求下式積分值

   $$V=\oint_c \frac{\cos(z)}{z^2(z-2)}dz$$ (15%)

8. 設 x, y 爲相互獨立之亂動 (random) 變數，其個別之機率密度函數 $p_X(x)$, $p_Y(y)$ 爲平均值等於 m_X, m_Y, 分散值 (variance) 等於 σ_x^2，σ_y^2 之高斯分佈。

   (1) 試證 x 之特性函數 $\Phi_x(\varpi)=E(e^{j\varpi x})=e^{jm_x\varpi-\frac{\sigma_x^2\varpi^2}{2}}$ (5%)

   (2) 當 $z=x+y$ 時，試求 z 之機率密度函數 $p_Z(z)$ (5%)