

所別：營建工程技術研究所  
學程別：

組別：大地組

科目：工程數學

一. (a) 請扼要說明何謂一階線性微分方程式 (Linear First Order Differential Equation)。 (10%)

(b) 有一方程式  $x^2 y' - xy = e^x y^3$ ，其中  $y = y(x)$ 。試應用  $z = y^{-2}$  之關係將此方程式轉換為  $z(x)$  的一階線性微分方程式，然後再求  $y(x)$  之解。 (15%)

二. 函數  $f(t)$  之拉普拉斯轉換之定義為  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$

(a) 試用上述之定義計算  $\mathcal{L}[t] = ?$  (10%)

(b) 試用拉普拉斯轉換法求解下列之微分方程式： (15%)

$$y''(t) - 4y(t) = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

三. 已知某向量場 (Vector Field) 為  $F = \cos(xy) \vec{i} - z^2 \vec{j} + (x+z) \vec{k}$   
定義  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ ，試求

(a) divergence of  $F$ ,  $\nabla \cdot F = ?$  (5%)

(b) 若向量場  $F$  代表土壤在穩定滲流狀態下在座標  $(x, y, z)$  處之滲流速變 (Seepage Velocity)，則  $\nabla \cdot F$  之物理意義為何？ (10%)

(c) curl of  $F$ ,  $\nabla \times F = ?$  (10%)

四.

(a) 矩陣  $[A] = \begin{bmatrix} 11 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{bmatrix}$ ；則反矩陣  $[A]^{-1} = ?$  (15%)

(b) 向量空間中組成一組基底 (Basis) 向量的要件為何？

試問向量  $F_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  和  $F_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$  是否可以成為 3 維 (Dimension)

向量空間中之一組基底？ (10%)