

所別：營建工程技術研究所  
學程別：

組別：結構甲組

科目：工程數學

一、使用 Fourier Transform 解  $y(t)$  (20%)

$$y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = \delta(t-3), \quad \text{其中 } \delta(t-3) \text{ 為 Dirac delta function}$$

二、已知一彈性力學問題的應力方程式  $\phi = \phi(r)$ ，由相容 (compatibility) 方程式

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0$$

試用 Euler (或 Cauchy-Euler) 微分方程式的解法解  $\phi(r)$  的通解 (General Solution)。 (20%)

三、試求  $f(x) = \int_0^x \sin 2\tau \sinh 2(x-\tau) d\tau$ ，(已知  $\int [A \sinh at - A \sin at] = \frac{2a^3}{5^4 - a^4}$ ) (20%)

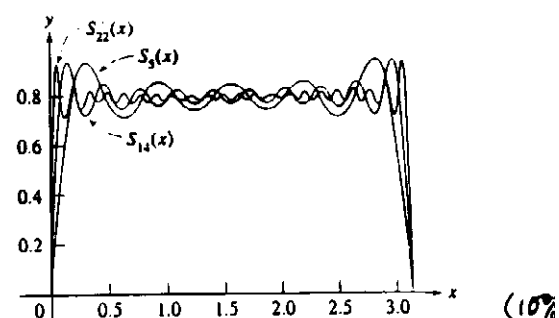
四、試求  $\iint_{\Sigma} \frac{xy}{z} d\sigma$ ，其中  $\Sigma$  為  $z = x^2 + y^2$  對應於第一象限之  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  的部分。 (20%)

五、(A) 在結構動力或地震工程試驗中，對於試驗數據的處理程序須使用數值過濾器 (Digital Filter)，而這些數值過濾器常有 Fourier 級數中所謂的遺漏 (leaking) 問題，我們稱之為 Gibbs Phenomenon。試根據下面例子解釋何謂 Gibbs Phenomenon。

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{if } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{if } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

其 Fourier 級數可表為  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$ ， $-\pi \leq x \leq \pi$

而 Fourier 級數的部分和 (partial sum) 可表為  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$   
 $S_5(x)$ ， $S_{14}(x)$  及  $S_{22}(x)$  如右圖所示，  
其中  $0 \leq x \leq \pi$



所別：營建工程技術研究所  
學程別：

組別：結構甲組

科目：工程數學

(B) 已知  $f(t)$  之 Laplace Transform 為  $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$   
試說明為何 Laplace Transform 之存在條件為

(10%)

$$|f(t)| \leq C_1 e^{C_2 t}, \quad s > C_2$$

其中  $C_1, C_2$  為常數。