

國立臺灣科技大學

八十九學年度碩士班招生考試試題

系所組別：化學工程系、化學工程系在職教師

科目：工程數學

本科總分為 100 分

請詳列計算過程，否則酌予扣分

1. (15%) 解一階常微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{32}{y}$ ， $y(10) = 0$ 。

2. (15%) 求微分方程 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\lambda^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$ ， $y(1) = y'(1) = 0$ 之非零解 (non-trivial solution)。

3. (10%) 解微分方程 $\frac{dy}{dt} + 3y + 2 \int_0^t y dt = f(t)$ ， $y(0) = 1$ 。其中

$$f(t) = 2 \text{ for } 1 \leq t \leq 2, \quad f(t) = 0 \text{ otherwise}$$

4. (10%) 求 A^{-1} ， $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (20%) 一維熱傳導方程式 (one-dimensional heat equation) 可以表示成下式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

其中 T 代表溫度， t 代表時間， $\alpha^2 = 1.158$ 代表參數， x 代表空間變數， $L = 80$ 代表長度，若其邊界條件與初始條件為

$$T(0, t) = 0, \quad T(L, t) = 0 \quad \text{for all } t$$

$$T(x, 0) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{80}\right)$$

請用分離變數法 (separation of variables) 解析溫度 $T(x, t)$

6. (10%) 假若函數 $f(z) = \frac{-3z+4}{z(z-1)(z-2)}$ ，請利用剩餘定理 (the Residue theorem)

求 $\oint_c f(z) dz$ ， c 為圓 $|z| = \frac{3}{2}$

7. (10%) 請求週期函數 $f(t)$ 的傅立葉級數 (the Fourier series)

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

8. (10%) 若函數 $g_1 = a_0$ ， $g_2 = b_0 + b_1 x$ ， $g_3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 之區間內形成單位正交函數集 (orthogonal functions)，請求 g_1, g_2, g_3 之值