

國立臺灣科技大學
九十學年度碩士班招生考試試題

系所組別：化學工程系
科 目：工程數學

本科總分為 100 分

1. 指出下列常微分方程為線性或非線性，並說明你的理由： (15%)
 - (a) 一階正(exact)微分方程 $e^x \sin y - 2x + (e^x \cos y + 1)y' = 0$
 - (b) 白努利(Bernoulli)方程 $y' + x^{-1}y = 3x^2y^3$
 - (c) 非齊次(non-homogeneous) Euler 方程式 $x^2y'' + 3xy' - 15y = \sin x$

2. 指出下列各函數或向量間互為線性相依或線性獨立，請說明理由： (10%)
 - (a) e^x, e^{-3x}, xe^{-3x}
 - (b) $(1, 0, -2, 4), (0, 2, -3, 1), (3, 1, 2, -1)$

3. 試證明二階線性常係數微分方程 $y'' + Ay' + By = 0$ 在 $A^2 - 4B < 0$ 時之一般解 (general solution)可表示成 $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ ，其中 A, B, α 及 β 皆為實數 (10%)

4. 求常微分方程 $y'' + \lambda^2 y = 0, y(1) = y(2) = 0$ 之非零解 (non-trivial solution) (15%)

5. 求解積分方程 $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(s)e^{t-s} ds$ (15%)

6. 分解 (diagonalize) 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 成為對角線 (diagonal) 矩陣 (15%)

7. 求解偏微分方程 (20%) (註： $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T = 0, t = 0, 0 \leq x \leq \infty \quad \text{其中 } \alpha \text{ 為常數}$$

$$T = 1, t > 0, x = 0$$

$$T = 0, x \rightarrow \infty, \text{ finite } t$$



137