

國立臺灣科技大學

九十二學年度碩士班招生考試試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組

科目：工程數學

注意：本試題總分 100 分，共四大題，每大題各有兩小題，配分詳題末標示。

一、有一微分方程式如下：

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 10 \sin(\ln x)$$

其中， $x > 0$ ， $y' = \frac{dy}{dx}$ ， $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ ， $\ln$  為自然對數。

- (1) 試用變數轉換法令  $z = \ln x$ ，將原方程式轉換為以  $z$  為自變數之「常係數微分方程式」。(10%)
- (2) 續上題，若知  $x=1$  時， $y(x)=3$ ， $y'(x)=0$ ，試求其解  $y(x)=?$  (15%)

二、線性聯立方程式之矩陣式為： $AX = B$

$$\text{其中， } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 - 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

- (1) 若此聯立方程式有唯一解，則  $k$  值為何？(10%)
- (2) 若  $k=3$ ，試求  $A$  之反矩陣？(15%)

三、定義單位階梯函數(unit step function)如下：

$$\begin{aligned} u(t-a) &= 0 \text{ if } t < a \\ u(t-a) &= 1 \text{ if } t \geq a \end{aligned}$$

- (1) 已知函數  $f(t) = 2t[1 - u(t-2)] - 2(t-4)[u(t-2) - u(t-4)]$ ，試求  $f(t)$  的拉普拉氏轉換， $L[f(t)] = ?$ 。(10%) (提示： $L[u(t-a)y(t)] = e^{-as}L[y(t+a)]$ )
- (2) 試以二階微分方程式為例，簡要說明如何應用拉普拉氏轉換來求解，並舉出較適合應用此法求解之微分方程式類型？(15%)

四、有一偏微分方程式如下所示： $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ；其中， $0 \leq z \leq 2H$ ， $t \geq 0$ ， $a$

為常係數。應用變數分離法及已知之邊界條件求得其解為：

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{4H^2}\right) ; \text{其中 } \exp \text{ 代表指數函數。}$$

- (1) 試根據初始條件： $u(z,0) = u_0$ ，求待定係數  $A_n = ?$  (15%)
- (2) 試舉出一個應用此種偏微分方程式求解的大地工程問題，並說明在你所舉出的問題中係數  $a$  的物理意義為何？(10%)

