

國立臺灣科技大學

九十二學年度碩士班招生考試試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組、營建工程系碩士班戊二組

科目：工程數學

總分100分

一. 試解 $y' = \frac{y-3}{x+y-1}$ 之通解。 (20%)

二. 試解 $yy'' = (y')^2$ 之通解。 (20%)

三. 令 $\bar{y} = A\bar{x}$ 其中 $\bar{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m \rangle^t$, $\bar{y} = \langle y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m \rangle^t$,

$$A \text{ 爲 } m \times m \text{ 之矩陣, } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

(1). 已知當 $x_n = \sin(n\theta)$, $n=1, \dots, m$ 時, 則 y_n 可表為

$$y_n = x_n f(\theta), n=2, \dots, m-1, \text{ 求 } f(\theta). \quad (5\%)$$

(2). 當 $x_n = \sin(n\theta)$, $n=1, \dots, m$ 時, 試求所有合適之 θ 值可同時滿足

$$y_1 = x_1 f(\theta) \text{ 及 } y_m = x_m f(\theta). \quad (10\%)$$

(3). 考慮 $m=4$, 求 A 之所有特徵值(eigen-value) λ , 及其所對應之

$$\text{特徵向量(eigen-vector) } \bar{e}, \text{ 並逐一列出。} \quad (10\%)$$

四. 試由 $F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$ 為起點, 證明 Convolution 定理

$$F(s)G(s) = L \left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right]$$

其中 $L[\cdot]$ 為 Laplace Transform 運算符號, $F(s) = L[f(t)]$, $G(s) = L[g(t)]$. (15%)

五. 令一向量場 $\bar{F}(x, y, z)$ 為 $\bar{F} = (y-4xz)\bar{i} + (x+\alpha z)\bar{j} + (3z^2 + \beta x^2)\bar{k}$

, 其中 α 與 β 為常數。已知 \bar{F} 沿路徑 C_1 與 C_2 所作之功相同, 其中

C_1 為 $(0,0,0) \rightarrow (3,4,2) \rightarrow (-3,2,1) \rightarrow (1,2,3)$ 之折線,

C_2 為 $(0,0,0) \rightarrow (2\pi,5,1) \rightarrow (-1,0,1) \rightarrow (1,2,3)$ 之折線。

(1). 試求 α 與 β 之值。 (10%)

(2). \bar{F} 沿路徑 C_1 或 C_2 所作之功。 (10%)

