

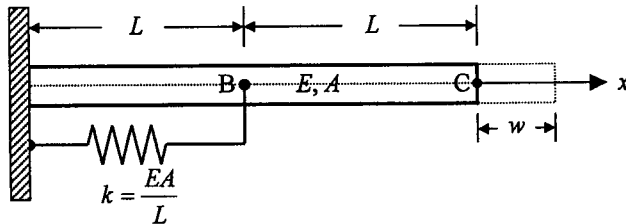
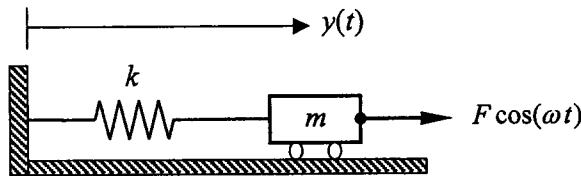
## 國立臺灣科技大學

## 九十三年度碩士班考試試題

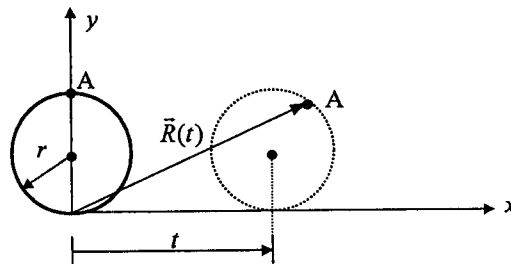
系所組別：營建工程系乙組、營建工程系丙組、營建工程系戊二組

科目：工程數學

注意：本試題總分 100 分

一、令  $L[\cdot]$  為 Laplace Transform 運算符號。(1) 試解  $L[y(t)\delta(t-a)]$ ，其中  $\delta(\cdot)$  為 Dirac Delta 函數， $a > 0$ 。(5%)(2) 一長為  $2L$ 、斷面積為  $A$ 、彈性模數為  $E$  之均質軸向桿件如圖示，其中桿件左端點為固定端，B 點處有一彈簧聯結至固定端且彈簧之彈性係數為  $k = EA/L$ 。令桿件之軸向變位函數為  $u(x)$ ，並假設桿件在 C 點處於承受某外力作用後產生  $w$  之位移即  $u(2L) = w$ ，試以 Laplace Transform 法求解桿件之軸向變位  $u(x)$ 。(提示： $L[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}L[f(t)]$ ，其中  $H(\cdot)$  為 Heaviside Step function) (20%)二、試解  $(2x+1)^2 y''(x) + (10x+5)y'(x) + 3y(x) = 0$  之通解(general solution)。(20%)三、一彈簧-質量塊系統(質量為  $m$ ，彈簧彈性係數為  $k$ )承受外力  $F \cos(\omega t)$  之作用如圖所示，(1) 請陳述  $m, k$  與  $\omega$  之關係式可使系統形成共振現象。(5%)(2) 令  $y(0) = y'(0) = 0$ ，試求在共振條件下之位移反應  $y(t)$ 。(15%)四、一半徑為  $r$  之圓形滾輪沿地板滾動前進如圖所示，設滾輪與地板間無滑動且滾輪中心點以等速前行。(1) 當  $t = 0$  時，A 點恰位於滾輪之正上方，試求 A 點之位置向量(position vector)

$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (5\%)$$

(2) 試求當  $t$  由 0 增加至  $2\pi r$  後，A 點總共行走之距離  $S$ 。(10%)五、已知  $3 \times 3$  矩陣  $A$  具有 3 個相異特徵值(eigen-value)，吾人利用三正交單位向量  $\vec{u}_1$ 、 $\vec{u}_2$  及  $\vec{u}_3$  對矩陣  $A$  進行測試而得下列結果： $A\vec{u}_1 = \vec{u}_1$ 、 $A\vec{u}_2 = \frac{8}{3}\vec{u}_2 - \frac{2}{3}\vec{u}_3$  及  $A\vec{u}_3 = -\frac{1}{3}\vec{u}_2 + \frac{7}{3}\vec{u}_3$ ，(1) 試求  $A$  之所有特徵值，並以  $\vec{u}_1$ 、 $\vec{u}_2$  及  $\vec{u}_3$  表示其對應之特徵向量(eigen-vector)。(15%)(2) 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{-1})^n$ ，其中  $(-1)$  代表反矩陣符號。(5%)