

## 國立臺灣科技大學

## 九十四學年度碩士班招生考試試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、營建工程系碩士班丙組、營建工程系碩士班戊組  
 科目：工程數學

注意：本試題總分 100 分

一、一微分方程式為  $3x^2 + xy^\alpha - x^2y^{\alpha-1} \frac{dy}{dx} = 0$ 。

- (1) 試求參數  $\alpha$  可使其成為正合方程式(Exact Differential Equation)。(5%)  
 (2) 試根據(1)之結果求微分方程式之解  $y(x)$ 。(10%)

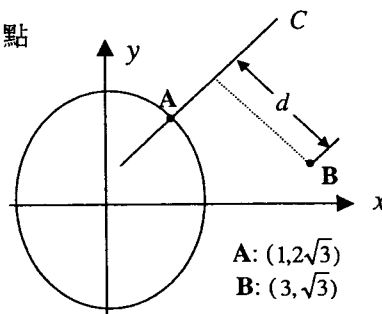
二、令函數  $f(t)$  之 Laplace Transform 運算可表為  $L[f(t)] = F(s)$ ，  
 且其逆轉換(Inverse Laplace Transform) 運算為  $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ 。

- (1) 試求  $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4s + 20}\right]$ 。(5%)  
 (2) 試求  $L^{-1}\left[\frac{s}{s+1}\right]$ 。(5%)  
 (3) 試以 Laplace Transform 解  $y'(t) - 4y(t) = 1; y(1) = 0, t \geq 0$  (註:其他方法不予計分)。(10%)

三、一橢圓之方程式為  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$ ，令  $C$  為通過橢圓上  $A$  點

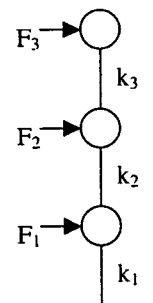
(座標為  $(1, 2\sqrt{3})$ ) 之法線(Normal Line) 如附圖所示，

- (1) 試求法線  $C$  之方程式。(5%)  
 (2) 試求橢圓外之  $B$  點 (座標為  $(3, \sqrt{3})$ )  
 與此法線  $C$  之最近距離  $d$ 。(10%)



四、考慮附圖中之簡化結構物模型，其中  $k_1, k_2, k_3$  為第一至三樓之樓間勁度，且  $k_1 = 2 \text{ N/m}$ ，  
 $k_2 = k_3 = 1 \text{ N/m}$ 。若  $F_1, F_2, F_3$  分別為作用於第一至三樓之力，則此三層樓之變形與作用力之關係如下：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_F \quad \text{或} \quad KU = F$$



其中  $u_1, u_2, u_3$  為第一至三樓之絕對位移。

- (1) 試求出  $K$  方陣之特徵值(Eigen-values)及特徵向量(Eigen-vectors)。(10%)  
 (2) 求出  $K$  之反矩陣  $K^{-1}$ ，並解出當  $F_1 = F_2 = F_3 = 1 \text{ N}$  時各層樓之變形  $u_1, u_2, u_3$ 。(5%)

53



## 國立臺灣科技大學

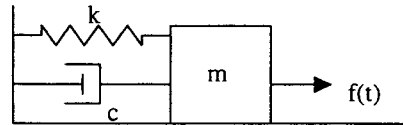
## 九十四學年度碩士班招生考試試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、營建工程系碩士班丙組、營建工程系碩士班戊組  
 科目：工程數學

五、考慮附圖中之單自由度系統，

此系統於外力  $f(t)$  作用下之運動方程式如下：

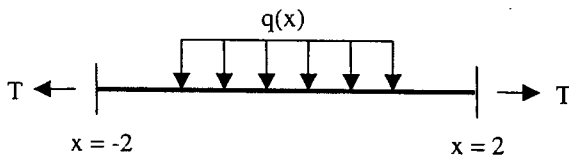
$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$



其中  $t$  是時間， $m, c, k$  分別是該系統之質量，阻尼及勁度， $x(t)$  是系統之位移。

- (1) 若  $m = 1, c = 1, k = 1$ ，該系統初始狀態為  $x(0) = 1, dx(0)/dt = 0$  (初速度為零)，在無外力作用下 ( $f(t) = 0$ )，求該系統之位移反應  $x(t), t \geq 0$ 。(10%)
- (2) 若  $m = 1, c = 0, k = 1$ ，系統初始狀態為  $x(0) = 0, dx(0)/dt = 0$ ，外力作用為  $f(t) = \sin(\omega t)$ ，試問  $\omega$  為何值時該系統會形成共振現象？並解出在此共振現象下之位移反應  $x(t)$ 。(10%)

六、考慮下圖中之繩索：



該繩索在受到拉力  $T$  及垂直荷重  $q(x)$  作用下之垂直變形之方程式為

$$T \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = q(x)$$

其中  $y(x)$  是此繩索之垂直變形。此繩索之左右兩端分別固定在  $x = -2$  及  $x = 2$  之位置，

在此二位置該繩索之垂直變形為零即  $y(-2) = y(2) = 0$ 。垂直荷重  $q(x)$  之分佈如下：

$$q(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 2, -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

- (1) 試求出  $q(x)$  之富立葉級數 (Fourier Series)。(5%)
- (2) 若  $T = 1$ ，利用(1)之結果，求出此繩索垂直變形  $y(x)$ 。(10%)

54

