

國立台灣科技大學九十六學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科目：工程數學

注意：本試題總分 100 分一、試解下列初始值問題之解 $y(x)$ 。(15%)

$$y'(x) + y(x) \tan x = \sin(2x); \quad y(0) = 1.$$

二、令函數 $f(t)$ 之 Laplace Transform 運算可表為 $L[f(t)] = F(s)$,且其逆轉換(Inverse Laplace Transform) 運算表為 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ 。

(1) 試求 $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$ 。(5%)

(2) 試求 $L^{-1}\left[\frac{s}{s+2}\right]$ 。(5%)

(3) 試求 $L^{-1}[\ln(s)]$ 。(5%)

(4) 試以 Laplace Transform 解 $y'(t) + y(t) = 1; y(0) = 0, t \geq 0$ (註:其他方法不予計分)。(5%)

三、已知一曲線 C 之參數表示為 $C: x(t) = 2 \cos(t), y(t) = 2 \sin(t), z = 2, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,且此曲線之質量密度函數(mass density function)為 $\rho(x, y, z) = xy$ (g/cm),

(1) 試以 x - y - z 之三軸空間圖, 概繪曲線 C 。(3%)

(2) 試求曲線 C 之總質量 m 。(6%)

(3) 試求曲線 C 之質量中心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 。(6%)

四、考慮以下單自由度系統

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = f(t)$$

其中質量 $m = 10$ kg, 彈力係數 $k = 40$ N/m。回答下列問題:

(1) 若阻尼係數 $c = 10$ N·second/m, 請問該系統之阻尼比 (= 阻尼/臨界阻尼) 為多少? 此為過阻尼或欠阻尼系統? (3%)

(2) 若阻尼係數 $c = 10$ N·second/m, 且無外力作用 $f(t) = 0$, 在 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 之初始狀態下, 系統之反應 $y(t)$ 為何? (9%)

(3) 若阻尼係數 $c = 0$ N·second/m, 請問該系統之共振頻率為何 (請註明單位)? (3%)

國立台灣科技大學九十六學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科目：工程數學

五、考慮以下方陣

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) 求此方陣之所有固有值 (eigenvalue) 與相對應之固有向量 (eigenvector)。(10%)
- (2) 若 $B = U^{-1}AU$ ，其中 U 為任意的非奇異 (non-singular) 的 3×3 方陣，請問 B 方陣之行列式 (determinant) 是多少？ B 方陣對角線之總和是多少？(6%)
- (3) 若 $B = UAU^T$ ，其中 U 為任意 2×3 方陣且 U 的秩 (rank) 為 2， U^T 為 U 之轉置矩陣，請問 B 方陣之秩是多少？(2%)

六、 $f(t)$ 函數之傅立葉轉換 (Fourier transform) 定義為 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$

考慮以下微分方程式

$$y'(t) + 2y(t) = g(t)$$

- (1) 若 $g(t) = \delta(t)$ ($\delta(t)$ 是德瑞克函數 Dirac Delta function)，請以傅立葉正轉換與反轉換求出系統之反應 $y(t)$ 。(7%)
- (2) 若 $g(t) = e^{-t}H(t)$ ($H(t)$ 是 Heaviside 函數)，系統之反應 $y(t)$ 等於 $e^{-t}H(t)$ 與某一函數 $R(t)$ 之摺積 (convolution)，請問此 $R(t)$ 函數為何？(5%)
- (3) 若 $g(t) = e^t H(t)$ ，請問系統反應 $y(t)$ 之傅立葉轉換 $Y(\omega)$ 為何？(5%)