

國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科目：工程數學

注意：本試題總分 100 分

一、一微分方程式為 $3y^4 - 1 + 12xy^3 \frac{dy}{dx} = 0$ 。

- (1) 試判斷其是否為正合方程式(Exact Differential Equation)。(5%)
 (2) 令 $y(2) = 1$ ，試根據(1)之結果求微分方程式之解 $y(x)$ 。(10%)

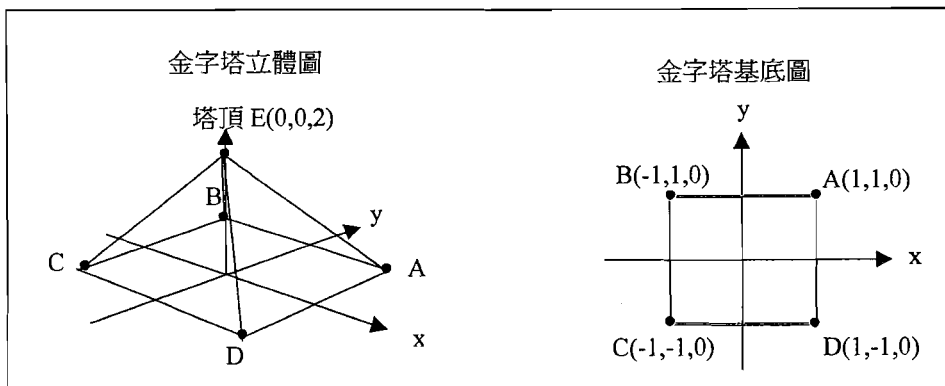
二、令函數 $f(t)$ 之 Laplace Transform 運算可表為 $L[f(t)] = F(s)$ ，
 且其逆轉換(Inverse Laplace Transform) 運算為 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ 。

(1) 令 $f(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 2 \\ (t-1)^2 & ; t \geq 2 \end{cases}$ ，試求 $L[f(t)]$ 。(8%)

(2) 試以 Laplace Transform 求解 $y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = \delta(t)$ ；其中 $\delta(t)$ 為 Dirac delta function， $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ ， $t \geq 0$ (註：其他方法不予計分)。(7%)

三、一 3-D 向量場為 $\mathbf{F} = -2x\mathbf{i} - ze^x\mathbf{j} + (2z-1)\mathbf{k}$

- (1) 試求 \mathbf{F} 之 divergence $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 。(5%)
 (2) 試求 \mathbf{F} 之 curl $\nabla \times \mathbf{F}$ 。(5%)
 (3) 試求面積分 $I = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma$ 之值，其中 Σ 為圖中金字塔上部 4 個斜面
 (即面 AED，面 DEC，面 CEB，面 BEA 之組合)， \mathbf{N} 為各斜面之朝外單位法向量。(10%)



國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科目：工程數學

四、

- (1) A 為一個
- 2×2
- 矩陣，若已知 A 滿足

$$A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

請列舉 A 的一個特徵向量，並請問該特徵向量之特徵值是多少？(5%)

- (2) 同四(1)小題中之 A 矩陣，請問
- $[-4 \ -2]^T$
- 是否為 A 之特徵向量？若是，請問其特徵值是多少？若不是，請說明為什麼？(5%)

- (3) 已知 B 矩陣之特徵向量是
- $[1 \ 1]^T$
- 與
- $[1 \ -1]^T$
- ，且相對應之特徵值分別為 1 與 2，試求 B 矩陣？(7%)

- (4) 若

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha + \gamma = 1$ 且 $\beta + \delta = 1$ ，試證明數字“1”必為 C 矩陣的一個特徵值。(6%)

五、

- (1) 若
- $f(x)$
- 為以下函數

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

試以傅立葉級數(Fourier series)在 $[-\pi, \pi]$ 區間中展開 $f(x)$ 函數。(8%)

- (2) 在題五(1)中的傅立葉級數稱為
- $g(x)$
- ，試問
- $g(0) = ?$
- ，
- $g(\pi) = ?$
- ，
- $g(0)$
- 是否與
- $f(0)$
- 相等？
- $g(\pi)$
- 是否與
- $f(\pi)$
- 相等？為什麼？(7%)

六、

- (1) 若一動態系統之反應
- $y(t)$
- 滿足

$$y''(t) + 9y(t) = f(t)$$

其中 t 是時間，而 $f(t)$ 是系統的輸入，請問該系統之共振頻率(單位 Hz)？(5%)

- (2) 同六(1)，試問當
- $f(t)$
- 為以下之那些函數時，會發生共振現象？可能單選或複選。(7%)

- A. $f(t) = \sin(9t)$
 B. $f(t) = \cos(3t)$
 C. $f(t) = e^{-3t}$
 D. $f(t) = e^{-3it}$ ($i = \sqrt{-1}$)

