國立台灣科技大學九十八學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科　　目：工程數學

注意: 本試題總分 100 分

一、一微分方程爲

$$2xy^3-3y-(3x+\beta x^2y^2-2\beta y)\frac{dy}{dx}=0$$

(a) 已知此微分方程爲正合方程式(Exact Differential Equation)，試求 β 之值。 **(5%)**

(b) 延續(a)，試求此正合方程式之解 $y(x)$ 。 **(10%)**

二、已知一函數 $f(x)$ 定義於 $[0, 2\pi]$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;\ x=0\\ 1 & ;\ 0<x\le 2\pi\end{cases}$$

(a) 令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{nx}{2})$ 爲 $f(x)$ 之 Fourier Sine Series 展開式，試求 b_n 。 **(10%)**

(b) 試利用 $g(x)$ 之分析結果，求無窮級數 $S=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$ 之級數和 S 。 **(5%)**

(c) 試指出在 $[0, 2\pi]$ 區間上， $g(x)$ 將出現 Gibbs Phenomenon 之所有可能點。 **(5%)**

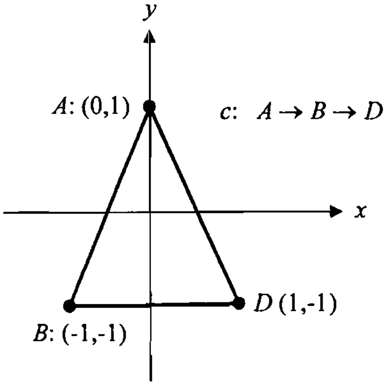
Fourier Series 之參考公式: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{L})\right];$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx;\qquad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$$

三、試計算

$$I=\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

其中閉合曲線 c 如圖所示。**(15%)**



國立台灣科技大學九十八學年度碩士班招生試題

系所組別： 營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科　　目： 工程數學

（總分爲 100 分）

四、一曲線在點 (x, y) 之切線斜率爲由此點到原點之線的斜率的 1/2，求該曲線方程式。 **(15%)**

五、(a) 設 A 矩陣有 n 個特徵值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$，另設 p 對角化 A，若 k 爲正整數，

試證明 $$A^k = p\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} p^{-1}$$ **(10%)**

(b) 若 A, B 爲兩非奇異(non-singular) $n \times n$ 矩陣，試證 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ **(10%)**

六、試限用 Laplace Transform 的方法解下列二階微分方程式

$$y'' + 2ty' - 4y = 1 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$ **(15%)**