

國立台灣科技大學九十九學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科目：工程數學

注意：本試題總分 100 分

一、已知一微分方程為

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{y}{x}, \quad x > 0$$

- (a) 試求此微分方程之通解(general solution)。(5%)
 (b) 延續(a)，令此微分方程具一初始條件 $y(1) = 1$ ，試求此初始值問題之解 $y(x)$ 。(5%)

二、試分別求解下列微分方程之通解(general solution)

- (a) $y'' + y' - 6y = 0$ 。(5%)
 (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$ 。(5%)
 (c) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ 。(5%)
 (d) $x^2 y'' - 5xy' + 10y = 0$ 。(5%)
 (e) $x(x-1)y'' + (3x-2)y' + y = 0$ 。(5%)

三、已知下列矩陣 A 之秩(rank)為 $\text{rank}(A) = 2$ ，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 3 & \beta \\ 3 & -2 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

試問 α 與 β 之值。(5%)四、試以高斯消去(Gauss-Jordan elimination)法之原理，求解下列矩陣 A 之反矩陣 A^{-1} 。(10%)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



國立台灣科技大學九十九學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科目：工程數學

五、已知 $u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t)$ $u(0) = 0$; $u'(0) = 0$

$$\text{其中 } f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < b \\ \frac{3}{b-c} & b \leq t \leq c \\ 0 & t > c \end{cases}$$

試以拉普拉斯轉換(Laplace Transform)求解 $\lim_{c \rightarrow b} u(t)$ 。(15%)六、已知 $g(x) = \begin{cases} 5 & 0 \leq x < 1 \\ -5 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ 且 $g(x+2) = g(x)$ (a) 試求 $g(x)$ 之傅利葉級數展開式(Fourier Series Representation)。(10%)(b) 令 $h(x) = 6g(1+x) + 4g(1-x)$ ，試求 $h(x)$ 之傅利葉級數展開式。(5%)(c) 已知 $y''(x) + ay(x) = g(x)$ $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$ 。若 $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ 不會發散，則 a 必

須滿足什麼條件？(5%)

七、已知一溫度場 $T(x, y, z) = e^{2x}y^3 + x^2e^{-y} + xyz$ ，B 點座標為 $B(0, 0, 1)$ ，A 點座標為 $A(1, 2, 3)$ (a) 試求溫度場 $T(x, y, z)$ 在 A 點沿著 \overline{AB} 方向之變化率(rate of change)。(10%)(b) 溫度場 $T(x, y, z)$ 在 A 點會產生最大變化率之方向是否平行於 \overline{AB} ？為什麼？(5%)